

Von der Schönheit der Mathematik



Freitag 24. April 2026

Verein UNIkumm, Lingenau

Zahlenzauber

Zahlenzauber

- Wähle eine 3-stellige Zahl, bei der sich die erste und die letzte Ziffer um mindestens 2 unterscheiden.

→ Zahl 1 .

- Drehe die Reihenfolge der Ziffern um.

→ Zahl 2 .

- Subtrahiere die kleinere Zahl von der größeren.

→ Zahl 3 .

- Drehe die Reihenfolge der Ziffern in Zahl 3 um

→ Zahl 4 .

- Zähle nun Zahl 3 und Zahl 4 zusammen.

Wie lautet das Ergebnis?

Zahlenzauber

Beim vorherigen rechnerischen Zaubertrick ist das Ergebnis stets die gleiche Zahl, unabhängig von der Ausgangszahl.

Zahlenzauber

Rechenvorschrift:

- Verdopple deine Hausnummer.
- Addiere 42 und multipliziere mit 50.
- Subtrahiere dein Geburtsjahr (4-stellig).
- Subtrahiere 50.
- Zähle die Anzahl der Geburtstage hinzu, die du in diesem Jahr schon hattest, also 0 oder 1.
- Ziehe 25 ab.

Zahlenzauber

- Verdopple deine Hausnummer.
- Addiere 42 und multipliziere mit 50.
- Subtrahiere dein Geburtsjahr (4-stellig).
- Subtrahiere 50.
- Zähle die Anzahl der Geburtstage hinzu, die du in diesem Jahr schon hattest, also 0 oder 1.
- Ziehe 25 ab.

Die beiden letzten Ziffern bedeuten nun dein Alter, und die Ziffern davor bilden deine Hausnummer.

Rechnerische Begründung

(für das Jahr 2026)

x = Hausnummer

y = Geburtsjahr

z = Zahl der Geburtstage, die ... (0 oder 1)

Rechengang:

$$\begin{aligned} & 50 \cdot (2x + 42) - y - 50 + z - 25 \\ &= 100x + 2100 - 75 - y + z \\ &= 100x + 2025 + z - y \end{aligned}$$

Dadurch wird die Hausnummer x um zwei Stellen nach vorne gerückt (das heißt hinten werden ihr quasi zwei Nullen angehängt), und die hintersten beiden Ziffern bilden das Alter des Teilnehmers (zwischen 1 und 99).

Zahlenzauber

Beachte beim vorherigen rechnerischen Zaubertrick:
Subtraktion von **25** am Schluss gilt nur für das Jahr **2026**.
Im nächsten Jahr **2027** müsste man **24** abziehen, dann
23 (2028), dann **22 (2029)**, dann **21 (2030)** usw.

Zahlenzauber

- Wähle eine beliebige 4-stellige Zahl, nur nicht aus 4 gleichen Ziffern.
- Ordne die 4 Ziffern der Größe nach: zuerst die größte, am Schluss die kleinste → Zahl 1
- Ordne die 4 Ziffern umgekehrt → Zahl 2
- Zähle nun Zahl 2 ab von Zahl 1
- Beginne mit der erhaltenen Zahl den Rechenprozess wieder von vorne
- Höre auf zu rechnen, falls sich die erhaltene Zahl einmal wiederholen sollte.

Wie lautet das Ergebnis?

Zahlenzauber

Beispiel:

Gewählte Zahl: 7408

→ Zahl 1: 8740

→ Zahl 2: 0478

Zahl 1 – Zahl 2: 8262 (neue Ausgangszahl)

→ Zahl 1: 8622

→ Zahl 2: 2268

Zahl 1 – Zahl 2: 6354 (neue Ausgangszahl)

→ ...

Zahlenzauber

Beim vorherigen rechnerischen Zaubertrick ist das Ergebnis stets die gleiche Zahl, unabhängig von der Ausgangszahl. Man nennt sie die **Kaprekar-Konstante**, benannt nach dem indischen Mathematiker D. R. Kaprekar (1905–1986).

Die magische Jahreszahl

2025

Die magische Jahreszahl 2025

- Quadratzahl 45^2
- Produkt zweier Quadratzahlen $5^2 \cdot 9^2$
- Quadratzahl von „20+25“ $(20+25)^2$
- Quadrat der Summe der ersten 9 natürlichen Zahlen
- Summe der ersten 9 Kubikzahlen
- Summe von 2, von 3 und von 4 Quadratzahlen
- Pythagoreische Zahl
- Erste Quadratzahl seit 1936. Nächste erst 2116.
- Die nächste Jahreszahl, die ähnlich faszinierende Eigenschaften in sich birgt, ist erst 3025, also in 1'000 Jahren.

Die magische Jahreszahl 2025

$$\begin{aligned} 2025 &= 3^4 \cdot 5^2 = 9^2 \cdot 5^2 = 45^2 = (20+25) \cdot (20+25) = (1+2+3+4+5+6+7+8+9)^2 \\ &= 36^2 + 27^2 = 40^2 + 20^2 + 5^2 = 40^2 + 20^2 + 4^2 + 3^2 \\ &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3 \\ &= \sqrt{567^2 + 1944^2} = \sqrt{1215^2 + 1620^2} \end{aligned}$$

(Pythagoras, rechtwinklige Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen und Hypotenusenlänge 2025)



$$= 1 \cdot 3^4 \cdot 5^2 = (3 \cdot (4-1) \cdot 5)^2 = 45^{1-2+3} = (15 \cdot 3)^{4-2} = (15 \cdot 3)^{4:2}$$

Die letzte Zeile zeigt ein paar Beispiele, 2025 nur unter je einmaliger Verwendung der fünf Ziffern 1,2,3,4,5 darzustellen.

2025 ist die erste quadratische Jahreszahl seit 1936. Eine weitere solche werden nur die Jüngsten unserer heutigen Generationen noch erleben können, nämlich erst in 91 Jahren ($2116 = 46^2$).

Die nächste quadratische Jahreszahl, die einerseits das Quadrat einer Summe von den ersten n natürlichen Zahlen sowie andererseits die Summe der ersten n Kubikzahlen ist, ist 3025, also in genau 1000 Jahren. Und zum letzten Mal war dies 1296 der Fall, das heißt vor 729 Jahren. Allein das dokumentiert schon die Besonderheit der heurigen Jahreszahl 2025.

**Um 1 verminderte
ungerade Quadratzahlen**

Beispiele:

$$1^2 = 1 = 8 \cdot 0 + 1$$

$$3^2 = 9 = 8 \cdot 1 + 1$$

$$5^2 = 25 = 8 \cdot 3 + 1$$

$$7^2 = 49 = 8 \cdot 6 + 1$$

$$9^2 = 81 = 8 \cdot 10 + 1$$

$$11^2 = 121 = 8 \cdot 15 + 1$$

$$13^2 = 169 = 8 \cdot 21 + 1$$

$$15^2 = 225 = 8 \cdot 28 + 1$$

$$17^2 = 289 = 8 \cdot 36 + 1$$

$$19^2 = 361 = 8 \cdot 45 + 1$$

$$21^2 = 441 = 8 \cdot 55 + 1$$

$$23^2 = 529 = 8 \cdot 66 + 1$$

$$25^2 = 625 = 8 \cdot 78 + 1$$

Vermutung:

Das um 1 verminderte Quadrat einer ungeraden Zahl geht immer durch 8.

Ich wenigstens kenne keine vollbefriedigende Erklärung dafür, warum jede ungerade Zahl (von 3 ab), mit sich selbst multipliziert, stets ein Vielfaches von 8 mit 1 als Rest ergibt.

Erich Bischoff, Erforscher der Kabbalah, 1920

Beweis:

Gerade Zahl: $2n$ (n eine natürliche Zahl)

Ungerade Zahl: $2n + 1$

$$\Rightarrow (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4n(n+1) + 1$$

Und eine der beiden Zahlen n oder $n+1$ ist auch noch gerade. Also ist $n(n+1)$ gerade, das heißt $4n(n+1)$ ist ein Vielfaches von 8.

Das Collatz-Problem

Das Collatz-Problem

Auch bekannt als **$3a+1$ -Problem** oder **$3n+1$ -Vermutung**

Nimm eine beliebige natürliche Zahl a . Wenn sie gerade ist, so teile sie durch 2, sonst bilde aus ihr die Zahl $3a+1$. Wiederhole nun diese Regel mit der erhaltenen Zahl, und dann immer wieder. Entsteht einmal eine Zahl, die schon vorher auftrat, so notiere die letzte Zahl davor als Resultat.

Beispiel:

$a := 6 \Rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \Rightarrow$
Resultat: 1

Wähle nun eine andere Startzahl und verfähre mit ihr gleich – auch hier wirst Du dein schwarzes Wunder erleben!

Das Collatz-Problem

Auch bekannt als **$3a+1$ -Problem** oder **$3n+1$ -Vermutung**

Nimm eine beliebige natürliche Zahl a . Wenn sie gerade ist, so teile sie durch 2, sonst bilde aus ihr die Zahl $3a+1$. Wiederhole nun diese Regel mit der erhaltenen Zahl, und dann immer wieder. Entsteht einmal eine Zahl, die schon vorher auftrat, so notiere die letzte Zahl davor als Resultat.

Beispiel:

$a := 7 \Rightarrow 7 \rightarrow 22 \rightarrow 11 \rightarrow 34 \rightarrow 17 \rightarrow 52 \rightarrow 26 \rightarrow 13 \rightarrow 40 \rightarrow 20$
 $\rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \Rightarrow \text{Resultat: } 1$

Wähle nun eine andere Startzahl und verfähre mit ihr gleich – auch hier wirst Du dein schwarzes Wunder erleben!

Das Collatz-Problem

Auch bekannt als **$3a+1$ -Problem** oder **$3n+1$ -Vermutung**

Nimm eine beliebige natürliche Zahl a . Wenn sie gerade ist, so teile sie durch 2, sonst bilde aus ihr die Zahl $3a+1$. Wiederhole nun diese Regel mit der erhaltenen Zahl, und dann immer wieder. Entsteht einmal eine Zahl, die schon vorher auftrat, so notiere die letzte Zahl davor als Resultat.

Beispiel:

$a := 9 \Rightarrow 9 \rightarrow 28 \rightarrow 14 \rightarrow 7 \rightarrow 22 \rightarrow 11 \rightarrow 34 \rightarrow 17 \rightarrow 52 \rightarrow 26 \rightarrow$
 $13 \rightarrow 40 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \Rightarrow$
Resultat: 1

Wähle nun eine andere Startzahl und verfähre mit ihr gleich – auch hier wirst Du dein schwarzes Wunder erleben!

Das Collatz-Problem

Auch bekannt als **3a+1-Problem**

Weitere Beispiele:

$a := 19 \Rightarrow 19 \rightarrow 58 \rightarrow 29 \rightarrow 88 \rightarrow 44 \rightarrow 22 \rightarrow 11 \rightarrow 34 \rightarrow 17 \rightarrow$
 $52 \rightarrow 26 \rightarrow 13 \rightarrow 40 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4$
 $\Rightarrow \text{Resultat: } 1$

$a := 21 \Rightarrow 21 \rightarrow 64 \rightarrow 32 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \Rightarrow$
 $\text{Resultat: } 1$

$a := 23 \Rightarrow 23 \rightarrow 70 \rightarrow 35 \rightarrow 106 \rightarrow 53 \rightarrow 160 \rightarrow 80 \rightarrow 40 \rightarrow 20$
 $\rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \Rightarrow \text{Resultat: } 1$

$a := 25 \Rightarrow 25 \rightarrow 76 \rightarrow 38 \rightarrow 19 \rightarrow 58 \rightarrow 29 \rightarrow 88 \rightarrow 44 \rightarrow 22 \rightarrow$
 $11 \rightarrow 34 \rightarrow 17 \rightarrow 52 \rightarrow 26 \rightarrow 13 \rightarrow 40 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8$
 $\rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \Rightarrow \text{Resultat: } 1$

Das Collatz-Problem

Auch bekannt als $3a+1$ -Problem

Hausaufgabe:

Versuche es mit Startzahl **27!**

Das Collatz-Problem

Auch bekannt als **$3a+1$ -Problem** oder **$3n+1$ -Vermutung**

Die **Collatz-Vermutung**, dass die Zahlenfolge immer in das Resultat 1 mündet, ist **bis heute (2025) ungelöst!**

Benannt nach ihrem deutschen Entdecker
Lothar Collatz (1910-1990)

Wie alt ist der Kapitän?

Wie alt ist der Kapitän?

Von einem Ozeandampfer und seinem Kapitän weiß man folgendes:

*Das Produkt aus dem **Alter** des Kapitäns, der **Anzahl** seiner Kinder, der **Länge** des Dampfers in m und der **Höhe** seiner Schornsteine in m ergibt **207'129**.*

Wie alt ist der Kapitän?

Wie alt ist der Kapitän?

Lösungshinweis:

$$207'129 = 3 \cdot 13 \cdot 47 \cdot 113$$

Die Kreiszahl π (Pi)

Besonderheiten der Zahl π .

Pi als „Zufallsgenerator“:

Obwohl Pi eindeutig definiert und in diesem Sinne keineswegs zufällig ist, gelten Ausschnitte aus ihrer Dezimaldarstellung wegen der anscheinend chaotischen Verteilung ihrer Ziffern als „sehr gute zufällige Zahlen“. Von allen verfügbaren Reihen von Zufallszahlen funktioniert die Dezimalentwicklung von Pi am besten.

Geburtsdatum in Pi:

In den Nachkommastellen von Pi kann jede und jeder irgendwo sein Geburtsdatum finden: **dd.mm.jjjj**. Zum Beispiel findet sich die Zahlenfolge **08 07 1957** (8. Juli 1957, mein Geburtstag) erstmals an der Position **30'619'029'507** (erste Nachkommastelle).

Siehe Seite <https://pi-experience.fhgr.ch/de/birthday> der Fachhochschule Graubünden.

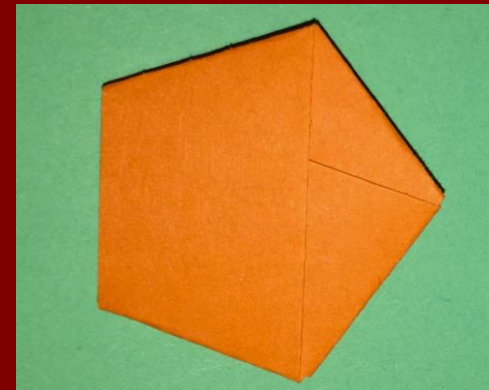
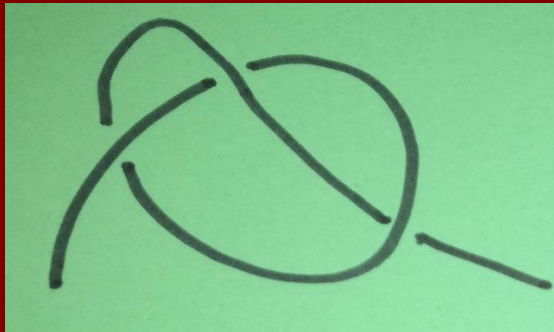
Der Goldene Schnitt

Fünfecksknoten

Nimm einen langen schmalen Papierstreifen (mit parallelen Kanten), bilde damit einen einfachen Knoten (Brezelknoten) und ziehe diesen langsam und vorsichtig zusammen, bis es nicht mehr weiter geht. Drücke dann das Ergebnis vorsichtig flach. Es wird immer ein regelmäßiges Fünfeck (Pentagon) sein! In einem solchen stehen die Längen einer Seite und einer Diagonale stets im Goldenen Schnitt!

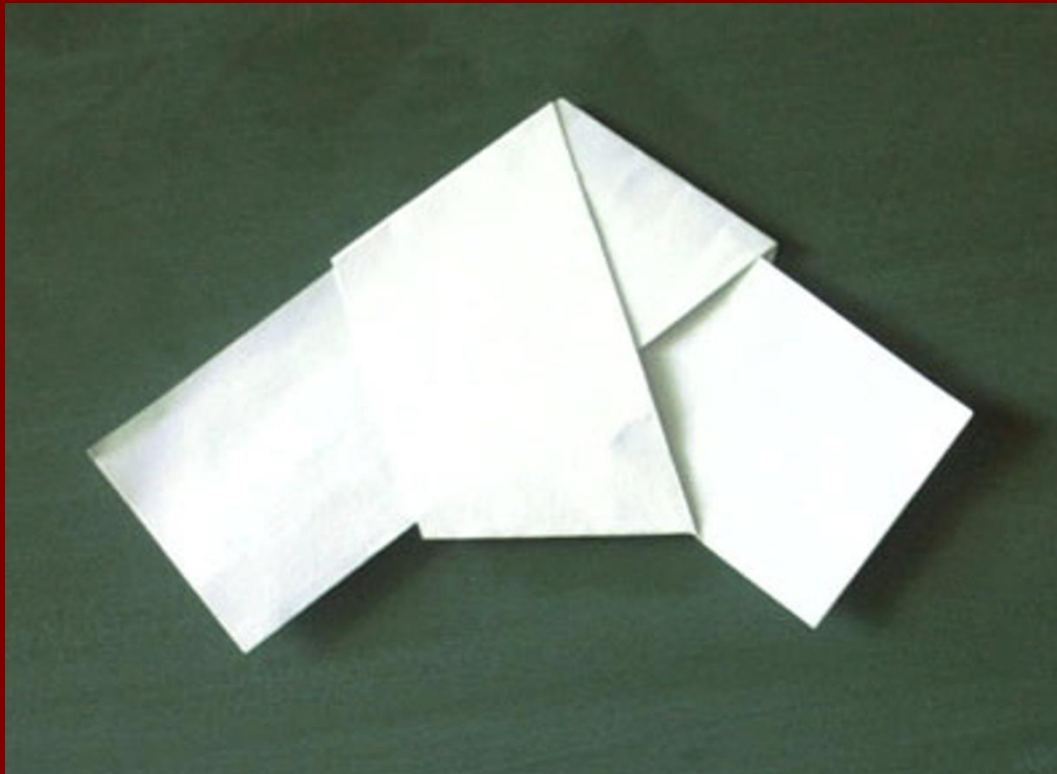
Der Goldene Schnitt

Fünfecksknoten



Der Goldene Schnitt

Fünfecksknoten



Unmögliche Figuren



Unmögliche Figuren



Viel Vergnügen!

Philipp Schöbi